S. HARADA

基礎統計物理（演習問題）

テーマ１：＜統計物理の周辺　その１＞

　２年次Ｉ期において物理学の基礎を構成する４本の柱の中で「電磁気学」と「解析力学（古典力学）」を学んできた。Ⅱ期からは「量子力学」と「統計力学」の基礎的な勉学がはじまる。解析力学は量子力学や統計力学を理解する上で重要であり，簡単に復習する。

　尚，粒子の運動は簡単のため１次元の運動としてよい。また，必要な物理量は自由に用いてよい。ただしし，意味が分かるように簡単に説明すること。

Q1. 自由粒子の運動を「ニュートン形式」，「ラグランジュ形式」及び「ハミルトン形式」で調べ，表にするなど簡潔に整理せよ。

　特に，各運動方程式において「自由な粒子」という条件がどのように記載されているかも述べよ。尚，この自由粒子が多く集まっている多粒子系は，「理想気体」となり，統計力学を学ぶ上で基本になる。

Q2. 調和振動子についても（Q1）と同様にまとめよ。その際，「調和振動子」という条件がどのように記載されているかも述べよ。

　尚，この調和振動子が多く集まっている多粒子系は，固体の比熱など固体の性質を調べる上で大切である。

Q3. 粒子は運動すると，静止している場合より別のエネルギーを持つ。

　並進運動の場合，このエネルギーはどのように表せるか。

・体重50kgのマラソン選手が平坦なコースを3時間かけて完走した。この時に選手がした仕事を推定せよ。

Q4. 粒子が回転運動をする場合，このエネルギーはどのように表せるか。

・質量50kgの物体（密度1g/cm^3，　長さ1mの円柱とする）が1秒間に2回転するときの回転のエネルギーを評価せよ。

Q5. 質量m の質点が調和振動（単振動）をしている。振幅A ,角振動数ωとするときのエネルギーはいくらか。

・調和振動の平均の運動エネルギーはいくらか。また，平均の位置エネルギーはいくらか。

テーマ２：＜統計物理の周辺　その２＞

　統計力学は「多粒子系」をミクロな立場から説明するに必要な考え方を体系づけた学問であり，気体，液体及び固体の性質を電子・原子レベルで理解するための必修科目である。

　ここでは，「多粒子」とはどの程度の量か調べる。
身近な物質から１モルの「水」，「鉄」および「アルミニウム」を例に具体的に調べてみよう。

Q1. 1 molの粒子数は？

Q2. 気体の状態にある場合
　(1)　体積は？＜標準状態に換算して＞
　(2)　(1)の体積を身近なもので示せ。
　(3)　気体の状態になる温度は？＜1気圧の状態とする＞

Q3. 液体の状態にある場合について(Q2,1～3)と同じように示せ。

Q4. 固体の状態にある場合について(Q2,1～2)と同じように示せ。

Q5. 1 molの粒子数を１列に並べたらどの程度の距離になるか。
　ただし，原子の大きさを直径１Åとせよ。
　また，身近な距離で示せ。（例えば，天文単位を用いて）

Q6. 1 molの粒子数を数えたら，どの程度の時間がかかるか。
　ただし，１秒間に1000ヶ数えられるものとする。
　また，身近な時間で示せ。（例えば，宇宙の年齢を用いて）

Q7. 1 molの粒子数系の運動方程式を立て，解くことを想定する。
- Hamiltonの運動方程式はどうなるか。
- 初期条件はどうしたらよいか。
- この運動方程式を解くにはどのくらいの時間がかかるか。

テーマ３：＜状態の数の評価　その１＞

統計力学では，対象とする系を「統計的集団」とみなし，「等確率の原理」を基本原理とし，「集団の平均値」として系を評価する。これには，新しい概念，特に「アンサンブル」とこのアンサンブルにおける「状態の数」と「アンサンブル平均」の概念や，状態の数を評価する方法に関して理解することが必要となる。同時に，系を特徴づけるには，熱力学的な物理量が有用であり，熱力学的な理解も不可欠である。ここでは，統計力学の基本的な考え方である，アンサンブルとこのアンサンブルにおける状態の数，g，を具体的な例（格子気体）を用いて評価し，これらの概念の理解を計る。

Q1：上記の文章の「」の用語について調べよ。

Q2: 格子気体に関して評価せよ。

ここで，格子気体とは N_oケの格子点にN_AケのA原子がランダムに分布するモデル系である。

(1)　このときのgを評価せよ。このとき gの変数も明示せよ。

(2) $\langle N_A \rangle$を評価せよ。$\langle\rangle$はアンサンブル平均を意味する。

(3) あるN_oに関して，gの値をN_A を変数として評価せよ。また，その様子をグラフに示せ。

(4) gを最大にする値はN_A とどのような関係があるか示せ。

(5) g_{max} をN_o を変数として評価せよ。また，その様子をグラフに示せ。

・ 例えば，N_o = 10, 20, 30,・・・100, 200, 300・・・1000,・・・

テーマ４：<統計物理の周辺　その３>

　統計力学を理解する上で，解析力学が基本となることをテーマ１で述べたが，中でも「ハミルトン形式」は特に大切である。ここではハミルトン形式における「位相空間」による運動の表現を復習する。
尚，粒子の運動は簡単のため１次元の運動としてよい。

Q1. 調和振動子の運動を位相空間を用いて表現し，運動の様子を簡単に説明せよ。

Q2. １次元箱の中の自由粒子の場合についても(Q1)と同様，位相空間を用いて表現し，説明せよ。

Q3. 「調和振動子」や「自由粒子」といった粒子の運動状態は，Q1,Q2の中のどこに表現されているか。

Q4. 次の用語を調べよ。
(1) 正準変数
(2) 正準方程式
(3) 正準変換
(4) 正準
(5) Liouvilleの定理

テーマ５：＜状態の数の評価　その２＞

テーマ３では，格子気体の状態の数を評価した。この時の「気体」は空間的な配置をランダムに分布するものであり，実際のガスのように原子が運動しているわけではない。ここでは，ランダムに並進運動する粒子，自由粒子系を例に，粒子に運動が伴う場合の状態の数の評価する方法を習得する。

Q1:自由粒子系の状態の数を評価せよ。ただし，この粒子系は体積 V の中に閉じこめられており，全粒子数を N, 系の全エネルギーをE とする。

Q2:n 次元の球の体積と表面積の関係を調べ分かり易く纏めよ。
例えば，n, $\Gamma(n/2+1)$, $\pi^{n/2}$, Cn, Vn, Sn を表にせよ。また，グラフ化できるものは試みよ。

テーマ６：<エネルギーが交換できる系>

孤立系は系の性質を調べる上で基本であった。ここでは，この「孤立系」を「複合系」に発展させエネルギーや粒子数が交換出来るようにする。はじめに，「エネルギーが交換」できる系の平衡状態から，「温度」と「エントロピー」を定義し，それらの意味を熱力学法則との関係で調べる。

Q1:「エネルギーが交換できる系」について，事例をあげよ。

Q2: 上記の文章の「」の用語について調べよ。

Q3: 各々が熱平衡状態にある2つの系が接触しエネルギーのみが交換できる場合について，統計力学的な扱いをまとめ，「温度」と「エントロピー」を定義せよ。

Q4: 熱力学との対応で以下の事項を統計力学的に説明せよ。

①熱力学第３法則
②熱力学第２法則
③熱力学第１法則
④熱力学第０法則
⑤エネルギーの流れは高温側から低温側に生じること
⑥エントロピー加算性
⑦エントロピーについては「エントロピーの増大の傾向」と「エントロピーの加算性」とがあるが，この両者の関係はそれぞれいかなる条件の時に使えるかを説明せよ。

Q5: 熱力学の発展に寄与した人々に関して調べよ。

Carnot, Joule, Kelvin, Clausius, Nernst, Boltzmann

テーマ７：＜粒子も交換できる系＞

　エネルギーと粒子数が交換できる系についてテーマ６に引き続き調べ，平衡状態から，「化学ポテンシャル」を定義し，それらの意味を熱力学法則との関係で調べる。

Q1: 「エネルギーと粒子数が交換できる系」について，事例をあげよ。

Q2: 上記の文章の「」の用語について調べよ。

Q3: 各々が熱平衡状態にある2つの系が接触しエネルギーと粒子が交換できる場合の統計力学的な扱いをまとめ，「温度」，「エントロピー」及び「化学ポテンシャル」を定義せよ。

Q4: 粒子の流れは化学ポテンシャルの高い側から低い側に生じることを説明せよ。

テーマ８：＜体積変化が可能な系＞

　シリンダー内の様に，体積変化が可能な系について調べる。
ただし，体積変化を行う場合，「系の状態の数が変わらない」と見なせる変化を行うものとする。

Q1:「体積変化が可能な系」について，事例をあげよ。

Q2: 体積変化が可能な系に関しての統計力学的な扱いをまとめよ。
　(1) 体積V が変化する系（機械的接触）の平衡条件を示せ。
　(2) 圧力p をσ，τ，V で表せ。ここで，σ，τ はエントロピーと温度を意味する。

Q3: 「系の状態の数が変わらない」とはどのようなことか。
　(1)①ポテンシャル，②熱，③可逆・非可逆過程の観点から説明せよ。
　(2) 「系の状態の数が変わらない」の表現として複数の言い方がある。(1)の観点に準じてその言い方を示せ。

Q4: 「系の状態の数が変わる」とはどのようなことか。
　(1)①ポテンシャル，②熱，③可逆・非可逆過程の観点から説明せよ。
　(2) 「系の状態の数が変わる」場合の事例を挙げよ。
　(3) 「系の状態の数が変わる」時，統計力学的に扱う場合どのようにしたらよいだろうか。

テーマ９：＜熱力学と統計力学（その１）＞

『名は体を表す』とあるが，熱・統計力学の概念を理解するためにも重要な用語がある。

「統計力学」は，気体・液体及び固体など多数の粒子からなる系，いわゆる「多粒子系」が示す現象を「微視的（ミクロ）」な立場から論ずるに必要な手法を体系づけた学問であり，多粒子系の性質を電子・原子レベルで理解するためには必修の科目である。

統計力学の特徴は，多粒子系の性質を，１つ１つの粒子に着目し，その系を「統計的集団（アンサンブル）」とみなし，「等確率の原理」を基本原理とし，この「集団の平均値」として系の振舞いを評価する手法である。これには，新しい概念がいくつも含まれている。特に，「系に許された状態」や必要とする物理量をこの状態について平均する「アンサンブル平均」といった概念や，系に許された状態を評価するための方法などを理解することが必要となる。

他方，系の状態を特徴づけるには，「熱力学的」，則ち，「巨視的（マクロ）」な見方が有用である。言い換えになるが，「系全体」が示す状態を「巨視的な状態」と呼び，系の性質をこの巨視的な物理量（状態量）で特徴づける（記述する）ことが，実際の問題を扱う上で有用となることが多い。こうしたマクロな物理量として，例えば，「温度，エントロピー，圧力，自由エネルギー，化学ポテンシャル等」がある。

学部の統計力学では，多粒子系が「定常状態（平衡状態）」にある場合についてミクロな立場から議論する。さらに，この多粒子系が外部と「接触（交換）」し，変化する場合について議論する。例えば，エネルギーが交換できる系（熱的に接触している系）などがある。

熱力学的には，「熱力学の恒等式」を示し，状態量を「一般化した座標と力」，「示強制と示量性」で分類し，状態量の概念の一般化を図る。また，系を特徴づける状態量である関数「熱力学関数」とその関数の独立変数（状態変数）について述べる。さらに，実際の系を取り扱う上で「適切な」独立変数（状態変数）に「変換」する方法，「ルジャンドル変換」について述べ，種々の熱力学関数と状態変数の組を説明しその使い方に触れる。

Q1：上記の文章の「」の用語について調べよ。

Q2：温度，エントロピー，圧力，体積，自由エネルギー，内部エネルギー，粒子数，化学ポテンシャルを示強制と示量性に分類せよ。また，その根拠を示せ。

Q3：熱力学の恒等式 $dU=TdS-pdv+\mu dN$を統計力学的に示せ。

Q4: 熱力学で定義される，「熱」と「仕事」を説明せよ。また，熱力学の恒等式の各項をこの熱と仕事に分類せよ。

Q5: 熱力学の恒等式を基点に，ルジャンドル変換により，H, F, G, J の熱力学関数を定義し，各熱力学関数と状態変数の組を説明せよ。

Q6：Gibbs-Duhemの関係式を説明せよ。

テーマ10：＜統計力学の基礎：解析力学から統計力学へ＞

運動を伴う粒子系について，「状態の数」を具体的に評価する場合，解析力学で出てきた「位相空間」の概念が重要な意味を持ってくる。「位相空間」の中の１つの点が１つの運動状態を表すからである。N粒子系の場合も，事情は同様であり，「６N次元の位相空間」の中の１つの点が［N粒子全体の］１つの運動状態を表すことになる。この系は平衡状態においても時間と共に常に変化していることになるが，位相空間の中ではある軌跡を示すことになる。閉じた系の場合，この軌跡は等エネルギー面になっていることが分かる。このことを言い換えると，位相空間の各点(q,p)に存在確率$\rho(q,p)$を考えると，(q, p)が等エネルギー面上にあればある値を持ち，面外では0となる。この時のρを確率密度あるいは分布関数といい，状態の数gは$g=\Sigma\rho$となる。Liouvilleの定理はこの分布関数の一般的な性質として，$d\rho/dt=0$，則ち軌跡に沿っての位相空間内の分布は時間に依存しないで不変であることを意味している。言い換えると，「状態の数」も時間に依らないことになり，アンサンブルの理論を用いる上で土台となる定理となる。

Q1：１次元の自由粒子および調和振動子の系を例に，これらの系の運動をHamiltonの正準方程式を解くことで示せ。また，位相空間でこれらの系の運動を図示せよ。
Q2：Liouvilleの定理は「正準変換」に対して不変であることを意味している。位相空間における正準座標系の変換について調べ，正準変換に対して不変な式についてまとめよ。
Q3：調和振動子系は，自由粒子系（理想気体）と並んで状態の数が解析的に評価できる系である。体積V，全エネルギーE，粒子数Ｎ個の古典的な一次元調和振動子系からなる系の状態の数を評価せよ。但し，調和振動子の粒子は互いに区別できるものとする。
Q4：１次元調和振動子は，１周期の間に等エネルギー面である楕円のすべての点を１回ずつ通る。言い換えると，等エネルギー面のどの点もすべて同じ確率を持っていることになる。このような性質を持つ系をエルゴード性をもつ系という。

ところで，２次元以上の場合には，軌道が等エネルギー面上のすべての点を通ることにはならない。なぜならば，位相空間の各点を通るハミルトンの運動方程式の解は常に１つだけであるからである。従って，軌道が自分自身と交わることが出来ないからである。そうすると，基本的な仮定（２）で示した時間平均がアンサンブル平均と等しくなるかどうか怪しくなってくる。軌道が等エネルギー面のすべての点を通る必要はなく，各点の任意の近傍を通れば十分であるという仮定が，準エルゴード仮説であるが，エルゴード性をもつことの意味をまとめてみよ。

テーマ11：＜具体的な応用：状態の数を基点とした取扱い；理想単原子気体＞

基本的で重要な系である理想単原子気体について実際的な評価を行い，「熱・統計力学」の総合的なまとめと量的な感覚を養う。

例として，22.4Lの箱に閉じ込められた^{4}He，300K,1モルのモデル系を考え，この系の状態の数，熱力学的諸量（圧力・気体のエネルギー・エントロピー等）を評価する。また，この系を等温膨張・可逆断熱膨張・自由断熱膨張等の変化を行った時の諸量を評価する。

問題：次の理想単原子気体系の熱力学的諸量を評価せよ。

Ⅰ　Model系として 300K，22.4L にある ^{4}He 1molの理想気体と見なせるガス系を考える。
- a. 系のエントロピーを評価せよ。また，状態の数はどの程度の数か。
- b. 系の圧力を評価せよ。
- c. 系のエネルギーを評価せよ。
- d. 系の化学ポテンシャルを評価せよ。
- e. 系のエンタルピーを評価せよ。
- f. 系のGibbsの自由エネルギーを評価せよ。
- g. 系の比熱を評価せよ。

Ⅱ　Model系(I)を等温膨張で可逆的に変化させ VをⅠの2倍にした時
- a. 系の圧力を評価せよ。
- b. 系のエントロピーを評価せよ。
- c. 膨張の際、気体によってなされた仕事を評価せよ。
- d. 膨張によるエネルギーの変化を求めよ。
- e. 系に流入した熱量を評価せよ。

Ⅲ　Model系(I)を断熱的にゆっくり膨張させ VをⅠの2倍 にした時
- a. 膨張後の温度を評価せよ。
- b. 膨張によるエネルギーの変化を評価せよ。
- c. 膨張の際、気体になされた仕事を評価せよ。

Ⅳ　Model系(I)を真空中へ急激に膨張させ VをⅠの2倍 にした時

［ 非可逆過程：自由断熱膨張 ］
- a. 膨張の際、どれだけの仕事がなされるか。
- b. 膨張後の温度を求めよ。
- c. 膨張にさいしてのエントロピー変化を評価せよ。

テーマ12：<状態の数：具体例から>

例題１　N個の小さな磁石からなる系を考える。簡単のため，この系の磁石の向きは，磁場の向きに対して平行か反平行の向きしかとれないとする。平行な状態をとる磁石の個数をs個とするとき，$g(N,s)$を求めよ。(磁性体のIsing model)

例題２　A原子とB原子からなる合金を考える。この合金の成分はA原子の数がN_A個,B原子の数がN_B個とするとき，この系の状態の数を求めよ。ただし，A,B原子は格子点にランダムに配置するものとする。（２元合金系のモデル)

例題３　N個の独立した調和振動子系を考える。この系の状態の数を求めよ。ある１つの調和振動子のエネルギー固有値は$\varepsilon_n=(n+1/2)h\nu$である。(Einstein model)

例題４　N個の独立した粒子から成る系を考える。各々の粒子は$-\varepsilon_0$とε_0の２つのエネルギー状態しかとりえないとする。全エネルギー$E=M\varepsilon_0$($M=-N$，・・・，N)の状態の数を求めよ。
(2準位系，Schottky系のモデル)

例題５　スピン1/2の粒子が磁場Hの中におかれるとZeeman効果としてそのエネルギー準位は$-\mu H$とμH の２つに分かれ,それぞれの磁場の方向に磁気モーメント$-\mu$またはμを持つ。この様な粒子N個から成る系が磁場Hの中におかれ温度Tに保たれている。この系の状態の数を求めよ。

テーマ13：＜具体的な応用：熱力学的な現象の実例から＞

　具体的な応用として，熱力学的な現象から実際の例を集めたものである。具体的な事例れを調べることで，「熱・統計力学」の総合的な理解と量的な感覚が養える。

＜温度が一定または一定と見なされる系での総合的な問題＞

a.10gの水，100gの水及び10gの鉄が各々1Jのエネルギーを吸収した。この時，エントロピー，状態の数はどれだけ変化するか。但し，温度はいずれも300Kとする。

b.10gの氷が融点ですべて融けた。この時，エントロピー，状態の数はどれだけ変化するか。

c.植物は光合成で物質を作り出している。（則ちエントロピーを減少させている。）平均的な１枚の葉は１日当たり90Jのエネルギーを太陽から受け，その10%をデンプンに変えるものとする。この時，1枚の葉はどれだけエントロピーを減少させていることになるか。

d.NH_4NO_3が水に溶ける時の自由エネルギーの変化を図式で示し反応の方向を考えよ。
　また，何度で溶けなくなるか評価せよ。
但し，$NH_4NO_3(S) \rightarrow NH_4^+(aq)+NO_3^-(aq)$の反応において，$\triangle H_0$=28kJ/mol,$\triangle S_0$=0.108kJ/mol Kとする。

e.水素分子の形成について自由エネルギーの変化を図式で示せ。
　また，$H_2 \rightarrow H + H$の反応が自然に起こる温度（熱分解反応温度）を評価せよ。
ここで，$H + H \rightarrow H_2$において$\triangle H_0$=-433kJ/mol,$\triangle S_0$=-0.1kJ/mol Kとする。

f.温度が一定の下で，圧力がp_1からp_2に変化した。エントロピーはどれだけ変化するか。

g. 食物は化学エネルギーを持っており，単位はkcalである。生物に摂取された場合，炭水化物は約4kcal/g，脂肪は約9kcal/gそしてタンパク質は約4kcal/gの内部エネルギーとなる。例えば，ご飯100gの内訳は水分65g，炭水化物31.7g，タンパク質2.6g，脂肪0.5gである。
（１）ご飯100gの内部エネルギーはいくらか。
（２）体重50kgの人が基礎代謝を保持するために一日どの程度の食物を摂取したらよいか。
　ご飯の量に換算せよ。新大生協の小ライスは180g，普通ライスは240gとのことであるが，小ライス何倍程度か。
注：栄養学では大カロリーCal=kcalを用いることがある。

テーマ14 ：総合的なテーマ1＜エネルギーの変換；熱機関＞

「熱的エネルギー」を「機械的エネルギー」に変換する代表として「熱機関」が知られており，高等学校の物理の教科書にも載っている。ここでは，その中でも代表的な「Carnot サイクル」をとりあげ，やや詳しく調べてみよう。

Q1：熱サイクル（カルノーサイクル）の熱効率を論ぜよ。

Q2: カルノーサイクルのエネルギー収支とエントロピー変化についてまとめよ。

- 「サイクル」とは何か。熱物理的な観点から記せ。
- 「熱機関」とは何か。熱物理的な観点から記せ。
- カルノーサイクルのエネルギー収支とエントロピー変化を示せ。
- このサイクルは可逆過程でもあるが，このことをエントロピー変化から述べよ。
- 上の熱サイクルの「熱と仕事の流れ」の概念を図に示せ。

Q3: 前回のテーマにもあるが，植物の光合成で物質を作り出している場合を考えよう。この場合には，植物はエントロピーは減少させている。平均的な１枚の葉は１日当たり90Jのエネルギーを太陽から受け，その10%をデンプンに変えるとある。これを，一種の熱機関を見なしたときのエネルギー収支とエントロピー変化を示せ。また，この熱サイクルの「熱と仕事の流れ」の概念を図に示せ。

Q4: カルノーサイクル以外にどのような熱サイクルが知られているか。

Q5: 実際の熱機関を用いたエネルギー変換では，全体の60%程度が廃熱として未利用のまま捨てられているのが実情である。特に，「低品質の熱」は「環境との温度差」が小さく熱機関に利用することは困難である。熱エネルギーの効率が悪いのは何故だろうか。
また，熱エネルギーを取り扱う場合，「エンタルピー」がよく使われるが，どのような場合にこれを使うのが便利なのか。

テーマ15: 総合的なテーマ2＜気体分子運動論による取扱いとアンサンブル理論の比較＞

気体分子運動論の考え方の基本は高等学校の物理の教科書にもあるので，講義においてはこの項目に時間を割かずにある。しかしながら，理想単原子気体の状態を気体分子運動論を基点とて取扱い，熱平衡における速度の分布を中心に議論することは多粒子系を評価する方法を理解する上でも重要な意味を持つ。ここでは，これまで論じてきたアンサンブル平均からも速度分布を評価することにより，両者の方法の違いを考えることで，統計力学的な手法（アンサンブル理論）の理解を深める。

Q1：熱平衡状態での理想気体の速度分布を求め，結果をグラフに示せ。
(Maxwellの速度分布則という)

Q2：アンサンブル理論から求められる速度分布則はどのように表されるか。
また，$N\to\infty$の時，この結果はMaxwellの速度分布則と一致することを示せ。

Q3:　室温での理想気体の速度はどの程度か。
O_2，N_2，^4Heを理想気体と見なして評価せよ。また，測定結果を調べ比較せよ。

参考：**総合的なテーマ：＜大学院入試問題から＞**

Ⅰ　原点からの距離rに比例する引力ポテンシャル$U(r)=\mu r$（$\mu>0$の定数）中にあるN個の同一種単原子分子からなる古典的な理想気体(各分子の質量はm)について以下の(1)から(5)の問に答えよ。ただし，プランク定数，ボルツマン定数はそれぞれh,kとし，必要ならばスターリングの公式$\ln N! \sim N \ln N - N$ を用いよ。又，スピンなど分子の内部自由度は考えなくてよい。

（１）１分子のラグランジアンを求めよ。

（２）１分子のハミルトニアンを求めよ。

（３）絶対温度Tにおける気体の分配関数を求めよ。

（４）この気体の比熱を求めよ。

（５）この気体のエントロピーを求めよ。

Ⅱ　無限大のポテンシャルに挟まれた長さLの１次元領域内に質量mの大きさの無視のできる粒子が１つ閉じこめられている。ただし，この領域内のポテンシャルエネルギーはゼロとし，プランク定数をh=2π・，ボルツマン定数をkとする。また，必要ならばガウス積分に関する公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(a/2)\ x^2)\ dx = (2\pi/a)^{1/2}$$

を用いてもよい。

（A）はじめに古典論を用いてこの系の温度Tでの熱力学的性質を調べる。

（１）ハミルトニアンを書け。

（２）分配関数を求めよ。

（３）比熱を求めよ。

（B）次に量子論を用いて調べる。

（４）エネルギー準位を求めよ。

（５）量子論を用いて比熱を計算するとその結果は（３）で求めた古典論での結果と特に低温で著しく異なる。その理由を１００字程度で簡潔に述べよ。

Ⅲ　量子統計の基礎について以下の問に答えよ。

（１）次の粒子をFermi粒子とBose粒子に分類せよ。

^{4}He，^{3}He，H，D　(以上原子)，H_2，D_2　(以上分子)，　陽子，中性子

Fermi粒子:

Bose粒子:

（２）理想Fermi気体に関して以下の問に答えよ。

①この系の１粒子状態のグランド・カノニカル分配関数Ξを求めよ。
ただし，この系の温度をτ (=$k\ T$)，１粒子状態のエネルギー固有値をε，化学ポテンシャルをμとする。ここで，kはBoltzmann定数を意味する。

②エネルギーεの状態に存在する平均粒子数を求めよ。

③Fermi分布関数とは何か。また，その特徴を図示するなどし簡潔に説明せよ。